**2. Геометрическая вероятность**

Геометрическая вероятность – вторая простая и наглядная модель вычисления вероятностей; в отличие от классической вероятности, она связана с некоторыми моделями статистических экспериментов, имеющих бесконечное (и несчетное) число исходов. Рассмотрим множество ***Ω*** на плоскости (Рис. 2.1.) и представим себе, что есть возможность бросать в это множество точку, так чтобы она с равной возможностью попадала в любое место множества***Ω***.

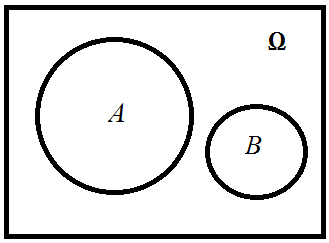


Рис. 2.1. Случайные события в модели геометрической вероятности

Выделим в Ω некоторое подмножество и попытаемся определить вероятность события  
 .

Чему равна вероятность ? Поскольку брошенная точка всегда попадает в множество Ω, следует считать Ω достоверным событием и положить Ω. Если сравнить два события и (рис. 2.1.), то интуитивно выглядит очевидным, что должно быть

поскольку площадь множества больше площади множества , а значит случайно брошенная точка имеет больше возможностей попасть в множество , чем в .

Обозначая площадь множества , можно предположить, что вероятность должна определяться отношением площадей S/S(Ω:

Какой должна быть функция чтобы так определенная обладала свойствами вероятности? Прежде всего, определена на отрезке , причем для нее выполнены условия . Если множества и не пересекаются, то положив

получим уравнение для функции *f* :

. (2.1)

Решение этого уравнения, удовлетворяющее нашим условиям, есть , таким образом, получаем ***геометрическое определение вероятности***:

Рассмотрим несколько примеров задач, приводящих к такому методу вычисления вероятностей.

**Пример 2.1.** Задача о встрече. Двое договорились встретиться в конкретном месте в интервале времени в 1 час. Моменты прихода каждого в течение этого часа случайны. Пришедший ждет другого в течение 10 минут и уходит. С какой вероятностью двое встретятся?

Обозначим моменты прихода через *x* и *y*, тогда пара чисел ω =(*x,y)* является элементарным исходом, а множество всех элементарных исходов есть квадрат со стороной 60 (если время измерять в минутах). Множество элементарных исходов, соответствующих случайному событию , есть полоса , изображенная на рисунке 2.2.

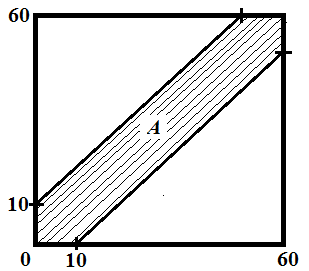


Рис. 2.2. Задача о встрече.

Наиболее простой способ вычислить площадь фигуры – из площади квадрата вычесть площади двух треугольников, лежащих выше и ниже полосы; в сумме эти площади составляют , так что, в соответствии с формулой (2.2),

.

**Пример 2.2.** Задача Бюффона. Пусть имеется плоскость, разлинованная параллельными прямыми, находящимися на расстоянии **2*l*** друг от друга (Рис. 2.3). На эту плоскость случайным образом бросается отрезок (игла) длины 2 ***a*** (***l*** < ***a***). С какой вероятностью отрезок пересечет какую-нибудь линию?

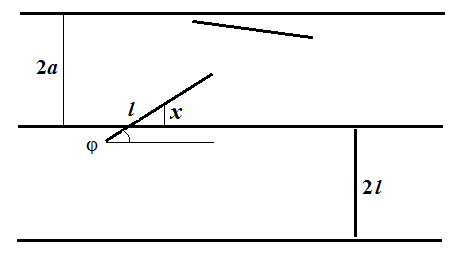


Рис. 2.3. Игла Бюффона

Чтобы привести задачу к геометрической вероятности, следует задать два параметра, которые бы однозначно определяли результат статистического эксперимента: будет ли иметь место пересечение. Например, такими параметрами могут служить угол наклона отрезка **φ** и расстояние от центра отрезка до ближайшей линии ***x***. Область изменения значений этих двух параметров изображена на Рис. 2.4. в виде прямоугольника **Ω**.

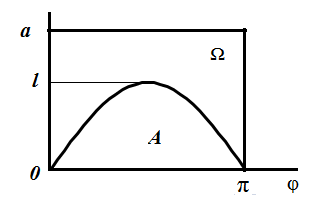


Рис. 2.4. Вероятность пересечения в задаче Бюффона

Отрезок пересечет ближайшую линию в том случае, если расстояние от его центра до ближайшей линии меньше, чем длина вертикального катета у прямоугольного треугольника с гипотенузой длины ***l*** и углом при вершине **φ** (на Рис. 2.3), то есть, выполнено условие: . Таким образом, мы имеем случайное событие в виде подмножества в ***Ω***:

,

вероятность которого равна

вычисляя площадь , , получаем в результате

Интересен этот эксперимент неожиданным поворотом в рассуждениях: из формулы (2.2) можно выразить π:

В свою очередь, многократно повторяя эксперимент (*n* раз бросая отрезок), мы найдем оценку вероятности в виде частоты наступления события :

где – число пересечений, наблюдавшихся в *n* бросаниях. Если действительно имеет место статистическая устойчивость, то при достаточно большом *n* частота будет близка к истинной вероятности , но тогда выражение

представляет собой статистическую оценку числа π .